Notes de lecture de l'article « Partial sums of the Möbius function » de Kannan Soundararajan

Michel Balazard et Anne de Roton

19 octobre 2008

Dans ce document, nous exposons la démonstration du théorème suivant.

Théorème (Soundararajan [4]) *(HR)*

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$M(N) = \sum_{n \leqslant N} \mu(n) \ll_\varepsilon \sqrt{N} \exp\bigl((\log N)^{1/2} (\log\log N)^{5/2+\varepsilon}\bigr).$$

Les lettres *(HR)* indiquent que l'on suppose l'hypothèse de Riemann vérifiée.

La méthode de démonstration a été inventée par Maier et Montgomery dans l'article [3]. Ils y démontrent que

$$M(N) \ll \sqrt{N} \exp\bigl((\log N)^{39/61}\bigr)$$

sous l'hypothèse de Riemann. Leur approche a été ensuite perfectionnée par Soundararajan (cf. [4]), qui a obtenu l'estimation

$$M(N) \ll \sqrt{N} \exp\bigl((\log N)^{1/2} (\log\log N)^{14}\bigr),$$

toujours sous l'hypothèse de Riemann. Dans ce qui suit, nous suivons la démonstration de Soundararajan dans [4], en y incorporant les quelques précisions qui permettent de remplacer 14 par n'importe quel nombre $> 5/2$.

Un mot sur la locution « T assez grand », que nous emploierons librement. Elle signifie $T \geqslant T_0$, où T_0 est une constante absolue et effectivement calculable (mais certainement très grande) telle que

- toutes les quantités dont nous parlons sont bien définies ;
- toutes les inégalités que nous écrivons sont vérifiées.

Par exemple, pour T assez grand on a

$$\frac{\log\log\log V'}{\log\log V'} \leqslant \frac{\log\log\log V}{\log\log V} \quad (V' \geqslant V \geqslant (\log\log T)^2).$$

Nous remercions Kannan Soundararajan pour de nombreux éclaircissements concernant son article [4].

Table des matières

1 Ordonnées V-typiques de taille T **3**

2 Le logarithme de la fonction ζ **3**
2.1 Estimations de $\frac{\zeta'}{\zeta}$ . . . 3
2.2 Estimations de $\log|\zeta|$: démonstration de la proposition 1 . . . 5

3 Majoration de $|x^z\zeta(z)^{-1}|$ **9**

4 Préalables à l'estimation de la fréquence des ordonnées atypiques **10**
4.1 Encadrement de la fonction indicatrice d'un intervalle . . . 10
4.2 Zéros de la fonction ζ et nombres premiers : la formule explicite de Guinand-Weil . . . 11
4.3 Moments de polynômes de Dirichlet . . . 11
4.4 Un calcul auxiliaire . . . 11

5 Sur le nombre de zéros de la fonction ζ dans un intervalle de la droite critique **12**
5.1 Encadrement paramétrique de l'écart à sa moyenne du nombre de zéros de la fonction ζ dans un intervalle de la droite critique . . . 12
5.2 Majoration de l'écart à sa moyenne du nombre de zéros de la fonction ζ dans un intervalle de la droite critique . . . 14
5.3 Fréquence des déviations du nombre de zéros de la fonction ζ dans un intervalle de la droite critique . . . 14

6 Valeurs de V pour lesquelles toutes les ordonnées sont V-typiques **16**
6.1 Minoration du logarithme du module de la fonction ζ . . . 17

7 Majoration du nombre d'ordonnées atypiques bien espacées dans un intervalle **17**

8 Démonstration du théorème **19**
8.1 Application de la formule de Perron . . . 19
8.2 Déformation du chemin d'intégration . . . 20
8.3 Majorations des contributions à A_N des différents segments de $\mathcal{S}_N$ . . . 20
8.4 Étude de la somme B_N . . . 22
8.5 Conclusion . . . 25

1 Ordonnées V-typiques de taille T

Nous allons évaluer $M(N)$ grâce à la formule de Perron en utilisant un contour d'intégration sur lequel les grandes valeurs de $|\zeta(z)|^{-1}$ seront aussi rares que possible. Pour quantifier cette rareté, Soundararajan a introduit la notion suivante.

On se donne un paramètre δ, tel que $0 < \delta \leqslant 1$. Soit T assez grand* et V tel que $(\log\log T)^2 \leqslant V \leqslant \log T/\log\log T$. Un nombre réel t est appelé une **ordonnée V-typique de taille T** si

• $T \leqslant t \leqslant 2T$;

(i) pour tout $\sigma \geqslant 1/2$, on a

$$\Big|\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n}\frac{\log(x/n)}{\log x}\Big| \leqslant 2V, \quad \text{où } x = T^{1/V};$$

(ii) tout sous-intervalle de $[t-1, t+1]$ de longueur $2\delta\pi V/\log T$ contient au plus $(1+\delta)V$ ordonnées de zéros de ζ ;

(iii) tout sous-intervalle de $[t-1, t+1]$ de longueur $2\pi V/\big((\log V)\log T\big)$ contient au plus V ordonnées de zéros de ζ.

Si $t \in [T, 2T]$ ne vérifie pas l'une des assertions *(i), (ii), (iii)*, on dira que t est une **ordonnée V-atypique de taille T**.

La pertinence de cette définition† quant à la taille de $|\zeta(s)|$ est fournie par l'énoncé suivant.

Proposition 1 *(HR) Soit T assez grand et V tel que* $(\log\log T)^2 \leqslant V \leqslant \log T/\log\log T$. *Soit t une ordonnée V-typique de taille T. On a*

$$\log|\zeta(\sigma+it)| \geqslant -V\log\Big(\frac{V/\log T}{\sigma-1/2}\Big) - 2(1+\delta)V\log\log V + O(V\delta^{-2}) \quad \textit{si} \quad \frac{1}{2} < \sigma \leqslant \frac{1}{2} + \frac{V}{\log T},$$

et

$$\log|\zeta(\sigma+it)| \geqslant O(V\delta^{-1}) \quad \textit{si} \quad \frac{1}{2} + \frac{V}{\log T} \leqslant \sigma \leqslant 2.$$

Cette proposition découle des propositions 7 et 8, démontrées ci-dessous après une étude préliminaire de la dérivée logarithmique de la fonction ζ.

2 Le logarithme de la fonction ζ

2.1 Estimations de $\frac{\zeta'}{\zeta}$

Notons $\psi = \Gamma'/\Gamma$ la dérivée logarithmique de la fonction Γ. On a (cf. [1], chapter 12, (8), (11))

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\psi(s/2) + \sum_\rho \frac{1}{s-\rho}, \tag{1}$$

où la somme porte sur les zéros non triviaux $\rho = \beta + i\gamma$ de la fonction ζ, et est calculée par la formule $\sum_\rho = \lim_{T\to\infty}\sum_{|\gamma|\leqslant T}$.

On en déduit d'abord la proposition suivante.

*En termes absolus, indépendamment de δ.

†Pour être précis, il faudrait parler d'ordonnée (δ, V)-typique de taille T. Dans ce qui suit, la référence à δ sera implicite.

Proposition 2 *Si T est assez grand, on a*

$$\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)=F(s)-\frac{1}{2}\log T+O(1)\quad(1/2\leqslant\sigma\leqslant 2,\ T\leqslant t\leqslant 2T,\ \zeta(\sigma+it)\neq 0),$$

où

$$F(s)=\sum_{\rho}\Re\frac{1}{s-\rho}=\sum_{\rho}\frac{(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2}. \tag{2}$$

Démonstration

Cela résulte de l'identité (1) et de l'estimation

$$\psi(s)=\log s+O(s^{-1})\quad(\Re s>0). \qquad \square$$

Nous donnons maintenant une autre identité concernant la dérivée logarithmique de la fonction zêta.

Proposition 3 *Soit $x\geqslant 1$ et $z\in\mathbb{C}$. On suppose que z n'est pas un pôle de $\frac{\zeta'}{\zeta}$. Alors*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^z}\log(x/n)=-\frac{\zeta'}{\zeta}(z)\log x-\Big(\frac{\zeta'}{\zeta}\Big)'(z)-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho-z}}{(\rho-z)^2}+\frac{x^{1-z}}{(1-z)^2}-\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{-2n-z}}{(z+2n)^2}.$$

Démonstration

On peut supposer $x>1$ (pour $x=1$, l'identité se ramène à la dérivée de (1)).

On constate que les deux membres sont des fonctions holomorphes de z dans $\mathbb{C}$ privé des pôles de $\frac{\zeta'}{\zeta}$. Il suffit donc de démontrer l'égalité pour z réel >1. La méthode exposée au chapter 12 de [1] s'applique, plus facilement car les intégrales seront absolument convergentes. On utilise la formule de Perron suivante :

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^z}\log(x/n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}-\frac{\zeta'}{\zeta}(z+w)x^w\frac{dw}{w^2}\quad(c>0).$$

On déplace la droite d'intégration vers la gauche[‡], à l'abscisse c' telle que $z+c'=-2N-1$, N entier positif. D'après le théorème des résidus, on obtient

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^z}\log(x/n)=-\frac{\zeta'}{\zeta}(z)\log x-\Big(\frac{\zeta'}{\zeta}\Big)'(z)-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho-z}}{(\rho-z)^2}+$$
$$\frac{x^{1-z}}{(1-z)^2}-\sum_{n\leqslant N}\frac{x^{-2n-z}}{(z+2n)^2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty}-\frac{\zeta'}{\zeta}(z+w)x^w\frac{dw}{w^2}.$$

La dernière intégrale tend vers 0 quand N tend vers l'infini, en vertu de l'estimation

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\ll\log(2|s|),$$

valable uniformément dans le demi-plan $\Re s\leqslant -1$, privé des disques de rayon $1/2$, centrés en $-2,-4,\ldots$. $\square$

[‡] Avec les précautions d'usage pour passer entre les zéros de ζ, cf. [1], p.108.

Proposition 4 *Soit*

- $T \geqslant 1$;
- $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Re z \geqslant 0$, $T \leqslant |\Im z| \leqslant 2T$ *et* z *n'est pas un pôle de* $\frac{\zeta'}{\zeta}$;
- $1 \leqslant x \leqslant T$.

Alors

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^z} \log(x/n) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(z) \log x - \Big(\frac{\zeta'}{\zeta}\Big)'(z) - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho - z}}{(\rho - z)^2} + O(T^{-1}). \tag{3}$$

Démonstration

On applique la proposition 3 et on vérifie que

$$\Big|\frac{x^{1-z}}{(1-z)^2}\Big| \leqslant \frac{x}{T^2},$$

et

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^{-2n-z}}{(z+2n)^2}\Big| &\leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{T^2 + 4n^2} \\ &\leqslant \frac{1}{T}.\end{aligned}$$

□

2.2 Estimations de $\log|\zeta|$: démonstration de la proposition 1

Proposition 5 *(HR) Soit* T *assez grand et* $T \leqslant t \leqslant 2T$. *On a uniformément pour* $1/2 < \sigma \leqslant 2$ *et* $2 \leqslant x \leqslant T$

$$\log|\zeta(\sigma + it)| \geqslant \Re \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma + it} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} - \Big(1 + \frac{x^{\frac12 - \sigma}}{(\sigma - 1/2)\log x}\Big) \frac{F(\sigma + it)}{\log x} + O(1).$$

Démonstration

On intègre (3) entre $z = \sigma + it$ et $z = 2 + it$:

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \log(x/n) \Big(\frac{n^{-2-it}}{-\log n} - \frac{n^{-\sigma - it}}{-\log n}\Big) &= \big(-\log\zeta(2+it) + \log\zeta(\sigma+it)\big)\log x - \frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) \\ &\quad - \sum_{\rho} \int_{\sigma}^{2} \frac{x^{\rho - u - it}}{(\rho - u - it)^2} du + O(T^{-1}),\end{aligned}$$

donc

$$(\log x)\log\zeta(\sigma+it) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n} \log(x/n) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) + \sum_{\rho} \int_{\sigma}^{2} \frac{x^{\rho-u-it}}{(\rho-u-it)^2} du + O(\log x).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\log|\zeta(\sigma+it)| &= \Re\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n}\frac{\log(x/n)}{\log x}-(\log x)^{-1}\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)+(\log x)^{-1}\Re\sum_\rho\int_\sigma^2\frac{x^{\rho-u-it}}{(\rho-u-it)^2}du+O(1)\\ &= \Re\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n}\frac{\log(x/n)}{\log x}-(\log x)^{-1}F(\sigma+it)+\frac{\log T}{2\log x}+\\ &\quad+(\log x)^{-1}\Re\sum_\rho\int_\sigma^2\frac{x^{\rho-u-it}}{(\rho-u-it)^2}du+O(1).\end{aligned}$$

Pour majorer le module de la somme sur les zéros, nous utilisons l'hypothèse de Riemann :

$$\begin{aligned}\Big|\sum_\rho\int_\sigma^2\frac{x^{\rho-u-it}}{(\rho-u-it)^2}du\Big| &\leqslant \sum_\rho\frac{1}{|\rho-\sigma-it|^2}\int_\sigma^2 x^{\frac12-u}du\\ &\leqslant \frac{x^{\frac12-\sigma}}{\log x}\sum_\rho\frac{1}{|\rho-\sigma-it|^2}\\ &= \frac{x^{\frac12-\sigma}}{(\sigma-1/2)\log x}F(\sigma+it),\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

Nous utiliserons dans la suite l'estimation simple suivante.

Proposition 6 *Pour $a>0$, $c>0$ et $N\in\mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{n=0}^N\frac{a}{a^2+(cn)^2}\leqslant\frac1a+\frac{\pi}{2c}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N\frac{a}{a^2+(cn)^2} &= \frac1a+\sum_{0<n\leqslant N}\frac{a}{a^2+(cn)^2}\\ &\leqslant \frac1a+\int_0^\infty\frac{a}{a^2+(ct)^2}dt\\ &= \frac1a+\frac{a}{c^2}\int_0^\infty\frac{1}{(a/c)^2+t^2}dt\\ &= \frac1a+\frac{\pi}{2c}.\end{aligned}$$

Proposition 7 *(HR) Soit*

- *T assez grand ;*
- *V tel que $(\log\log T)^2\leqslant V\leqslant\log T/\log\log T$;*
- *t une ordonnée V-typique de taille T.*

Alors

$$\log|\zeta(\sigma+it)|\geqslant O(V/\delta)\quad(1/2+V/\log T\leqslant\sigma\leqslant2).$$

Démonstration
Posons $x = T^{1/V}$. On a $2 \leqslant x \leqslant T$ et

$$\frac{x^{\frac{1}{2}-\sigma}}{(\sigma-1/2)\log x} \leqslant \frac{\exp(-V\log x/\log T)}{V\log x/\log T} \quad (1/2+V/\log T\leqslant\sigma)$$
$$= e^{-1} \leqslant 1.$$

La proposition 5 donne

$$\begin{aligned}\log|\zeta(\sigma+it)| &\geqslant \Re\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n}\frac{\log(x/n)}{\log x} - \Big(1+\frac{x^{\frac{1}{2}-\sigma}}{(\sigma-1/2)\log x}\Big)\frac{F(\sigma+it)}{\log x} + O(1)\\ &\geqslant \Re\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n}\frac{\log(x/n)}{\log x} - 2\frac{F(\sigma+it)}{(\log T)/V} + O(1)\\ &\geqslant -2V - 2\frac{V}{\log T}F(\sigma+it) + O(1) \quad \text{(car } t \text{ est } V\text{-typique ; on utilise } \textit{(i)} \text{ page 3).}\end{aligned}$$

Pour majorer $F(\sigma+it)$, nous considérons différents domaines de sommation :
• $2\pi n\delta V/\log T \leqslant |t-\gamma| \leqslant 2\pi(n+1)\delta V/\log T \quad (0\leqslant n\leqslant N = \lfloor(\log T)/4\pi\delta V\rfloor)$,
• le domaine complémentaire, qui est inclus dans $\{\gamma, |t-\gamma|\geqslant 1/2\}$.
La contribution de la première catégorie de zéros est

$$\begin{aligned}&\leqslant 2(1+\delta)V\sum_{n=0}^{N}\frac{(\sigma-1/2)}{(\sigma-1/2)^2+(2\pi\delta nV/\log T)^2} \quad \text{(car } t \text{ est } V\text{-typique ; on utilise } \textit{(ii)}\text{)}\\ &\ll V\Big(\frac{1}{\sigma-1/2}+\frac{1}{\delta V/\log T}\Big) \quad \text{(proposition 6)}\\ &\ll \delta^{-1}\log T.\end{aligned}$$

La contribution de la seconde catégorie de zéros est

$$\begin{aligned}&\leqslant \sum_{|t-\gamma|\geqslant 1/2}\frac{(\sigma-1/2)}{(\sigma-1/2)^2+(t-\gamma)^2}\\ &\ll \log T \quad \text{(cf. [1], p.98).}\end{aligned}$$

Cela démontre l'estimation annoncée. □

Proposition 8 *(HR) Soit*
• *T assez grand ;*
• *V tel que $(\log\log T)^2 \leqslant V \leqslant \log T/\log\log T$;*
• *t une ordonnée V-typique de taille T.*
Alors, pour $\frac{1}{2} < \sigma \leqslant \sigma_0 (= 1/2 + V/\log T)$, on a

$$\log|\zeta(\sigma+it)| \geqslant \log|\zeta(\sigma_0+it)| - V\log\frac{(\sigma_0-1/2)}{(\sigma-1/2)} - 2(1+\delta)V\log\log V + O(V\delta^{-2}).$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}
\log|\zeta(\sigma_0+it)|-\log|\zeta(\sigma+it)| &= \int_\sigma^{\sigma_0} \Re\frac{\zeta'}{\zeta}(u+it)du \\
&\leqslant \int_\sigma^{\sigma_0} F(u+it)du \\
&= \sum_\gamma \int_\sigma^{\sigma_0} \frac{(u-1/2)}{(u-1/2)^2+(t-\gamma)^2}du \\
&= \frac{1}{2}\sum_\gamma \log\frac{(\sigma_0-1/2)^2+(t-\gamma)^2}{(\sigma-1/2)^2+(t-\gamma)^2}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Pour commencer, observons que

$$\frac{(\sigma_0-1/2)^2+(t-\gamma)^2}{(\sigma-1/2)^2+(t-\gamma)^2}$$

est une fonction décroissante de $|t-\gamma|$ si $1/2<\sigma\leqslant\sigma_0$.

Pour majorer la somme (4), nous considérons différents domaines de sommation :

- $|t-\gamma|\leqslant \pi V/\big((\log V)\log T\big)$;
- $(2\pi\delta n+\pi/\log V)V/\log T\leqslant|t-\gamma|\leqslant\big(2\pi\delta(n+1)+\pi/\log V\big)V/\log T \quad (0\leqslant n\leqslant N=\lfloor(\log T)/4\pi\delta V\rfloor)$;
- le domaine complémentaire, qui est inclus dans $\{\gamma,\ |t-\gamma|\geqslant 1/2\}$.

Comme on a

$$\frac{(\sigma_0-1/2)^2+(t-\gamma)^2}{(\sigma-1/2)^2+(t-\gamma)^2}\leqslant\frac{(\sigma_0-1/2)^2}{(\sigma-1/2)^2},$$

et comme t est V-typique, la condition *(iii)* (page 3) nous permet de dire que la contribution de la première catégorie de zéros est

$$\leqslant V\log\Big(\frac{\sigma_0-1/2}{\sigma-1/2}\Big).$$

La contribution de la deuxième catégorie de zéros est, d'après *(ii)* (page 3)

$$\begin{aligned}
&\leqslant 2(1+\delta)V\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\log\frac{1+(2\pi\delta n+\pi/\log V)^2}{(2\pi\delta n+\pi/\log V)^2} \\
&= (1+\delta)V\log\big(1+(\pi^{-1}\log V)^2\big)+(1+\delta)V\sum_{n=1}^{N}\log\Big(1+\frac{1}{(2\pi\delta n+\pi/\log V)^2}\Big) \\
&\leqslant 2(1+\delta)V\log\log V+O(\delta^{-2}V).
\end{aligned}$$

Enfin, la contribution de la troisième catégorie de zéros est

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{|t-\gamma|\geqslant 1/2}\log\Big(1+\frac{(\sigma_0-1/2)^2}{(t-\gamma)^2}\Big)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{|t-\gamma|\geqslant 1/2}\frac{(\sigma_0-1/2)^2}{(t-\gamma)^2}\\
&\ll (V/\log T)^2\log T\\
&\ll V/\log\log T.
\end{aligned}$$

Ces trois estimations démontrent le résultat annoncé. □

3 Majoration de $|x^z\zeta(z)^{-1}|$

C'est la proposition suivante qui sera utilisée lors de l'application de la formule de Perron.

Proposition 9 *(HR) Soit*

- t *assez grand ;*
- $x \geqslant t$ *;*
- V' *tel que* $(\log\log t)^2 \leqslant V' \leqslant (\log t/2)/(\log\log t/2)$ *;*
- $V \geqslant V'$.

On suppose que t est une ordonnée V'-typique (de taille T').

Alors

$$|x^z\zeta(z)^{-1}| \leqslant \sqrt{x}\exp\big(V\log(\log x/\log t)+2(1+\delta)V\log\log V+O(V\delta^{-2})\big) \qquad (V'\leqslant(\Re z-1/2)\log x\leqslant V,\quad |\Im z|=t).$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}
\log|x^z\zeta(z)^{-1}| &= \Re z\log x-\log|\zeta(z)|\\
&\leqslant \frac{1}{2}\log x+V-\log|\zeta(z)|,
\end{aligned}$$

car $(\Re z-1/2)\log x\leqslant V$. Distinguons maintenant deux cas.

- Si $\Re z-1/2\leqslant V'/\log T'$, la proposition 1 permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}
-\log|\zeta(z)| &\leqslant V'\log\frac{V'/\log T'}{\Re z-1/2}+2(1+\delta)V'\log\log V'+O(V'\delta^{-2})\\
&\leqslant V'\log\frac{V'/\log T'}{V'/\log x}+2(1+\delta)V'\log\log V'+O(V'\delta^{-2})\\
&= V'\log\frac{\log x}{\log T'}+2(1+\delta)V'\log\log V'+O(V'\delta^{-2}).
\end{aligned}$$

- Si $\Re z-1/2> V'/\log T'$, on aura grâce à la proposition 1

$$\begin{aligned}
-\log|\zeta(z)| &\leqslant O(V'\delta^{-1})\\
&\leqslant V'\log\frac{\log x}{\log T'}+2(1+\delta)V'\log\log V'+O(V'\delta^{-2}).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\log|x^z\zeta(z)^{-1}| &\leqslant \frac{1}{2}\log x + V - \log|\zeta(z)| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\log x + V'\log\frac{\log x}{\log t} + 2(1+\delta)V'\log\log V' + O(V'\delta^{-2}) + V + V'\log\frac{\log t}{\log T'} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\log x + V\log(\log x/\log t) + 2(1+\delta)V\log\log V + O(V\delta^{-2}). \qquad \square
\end{aligned}$$

4 Préalables à l'estimation de la fréquence des ordonnées atypiques

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ici des résultats auxiliaires, essentiellement issus du §2 de [4], que nous utiliserons au §5.1 ci-dessous. Nous renvoyons à [4] pour des références et des indications de démonstrations.

4.1 Encadrement de la fonction indicatrice d'un intervalle

La proposition suivante résume la construction de Selberg de bonnes approximations analytiques de la fonction caractéristique d'un intervalle. On définit la transformation de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ par la formule

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi tx}dt.$$

Proposition 10 *Soit $h > 0$, $\Delta > 0$. Soit $\chi_h = 1_{[-h,h]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-h,h]$. Il existe des fonctions entières paires F_+ et F_- ayant les propriétés suivantes.*

(i) $F_-(u) \leqslant \chi_h(u) \leqslant F_+(u)$ pour tout réel u ;

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty}|F_\pm(u) - \chi_h(u)|du = 1/\Delta$, c'est-à-dire $\hat{F}_\pm(0) = 2h \pm 1/\Delta$;

(iii) $\hat{F}_\pm$ est réelle et paire, $\hat{F}_\pm(x) = 0$ pour $|x| \geqslant \Delta$ et $|x\hat{F}_\pm(x)| \leqslant 2$ pour tout x ;

(iv) Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant 2h$, on a

$$|F_\pm(z)| \ll \frac{e^{2\pi|\Im z|}}{(\Delta|z|)^2}.$$

Démonstration

Contentons-nous d'une indication pour *(iii)*. On a

$$\begin{aligned}
|x\hat{F}_\pm(x)| &\leqslant |x\hat{\chi}_h(x)| + |x|\int_{-\infty}^{+\infty}|F_\pm(u) - \chi_h(u)|du \\
&= \Big|\frac{\sin 2\pi hx}{\pi}\Big| + \frac{|x|}{\Delta} \\
&\leqslant \frac{1}{\pi} + 1, \quad \text{si } |x| \leqslant \Delta.
\end{aligned}$$

D'autre part $|x\hat{F}_\pm(x)| = 0$ si $|x| \geqslant \Delta$. $\square$

4.2 Zéros de la fonction ζ et nombres premiers : la formule explicite de Guinand-Weil

Nous donnons une version de la formule explicite de Guinand-Weil, reliant les nombres premiers (représentés par la fonction Λ de von Mangoldt) aux zéros non triviaux $\rho = \beta + i\gamma$ de la fonction ζ.

Proposition 11 *Soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, et $h(s)$ une fonction analytique dans la bande $|\Im s| \leqslant \frac{1}{2}+\varepsilon$, y vérifiant $h(s) \ll (1+|s|)^{-1-\delta}$, et réelle sur la droite réelle. Alors*

$$\sum_\rho h\big((\rho - i)/2)\big) = h\Big(\frac{1}{2i}\Big) + h\Big(-\frac{1}{2i}\Big) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\Re\psi\Big(\frac{1}{4}+\frac{iu}{2}\Big)du$$
$$- \frac{\log \pi}{2\pi}\hat{h}(0) - \frac{1}{2\pi}\sum_n \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\Big(\hat{h}\Big(\frac{\log n}{2\pi}\Big) + \hat{h}\Big(-\frac{\log n}{2\pi}\Big)\Big).$$

Signalons tout de suite la formule (2.3) de l'article de Goldston et Gonek [2]. C'est une évaluation de l'intégrale figurant dans la formule explicite, appliquée aux translatées des fonctions $F_\pm$.

Proposition 12 *Soit $t \geqslant 4$, $\Delta \geqslant 1$, $0 < h \leqslant \sqrt{t}$, et $F_\pm$ les fonctions de la proposition 10. On a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_\pm(u-t)\Re\psi\Big(\frac{1}{4}+\frac{iu}{2}\Big)du = (2h \pm 1/\Delta)\log\frac{t}{2} + O(1).$$

4.3 Moments de polynômes de Dirichlet

Dans la proposition suivante, une inégalité de type « grand crible », nous reprenons en partie la formulation originale de Maier et Montgomery (Lemma 5 de [3]).

Proposition 13 *Soit $P(s) = \sum_{p\leqslant N} a(p)p^{-s}$ un polynôme de Dirichlet (la variable de sommation p est un nombre premier).*

Soit $s_1, \ldots, s_R \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $T \geqslant 3$ tels que

- $1 \leqslant |\Im(s_i - s_j)| \leqslant T$, $i \neq j$;
- $\Re s_i \geqslant \alpha$, $1 \leqslant i \leqslant R$.

Alors, pour tout entier positif k tel que $N^k \leqslant T$, on a

$$\sum_{r=1}^{R} |P(s_r)|^{2k} \ll T(\log T)^2 k!\Big(\sum_{p\leqslant N} |a(p)|^2 p^{-2\alpha}\Big)^k.$$

4.4 Un calcul auxiliaire

Cette proposition est un simple calcul auxiliaire, faisant intervenir quatre paramètres liés par diverses relations.

Proposition 14 *Soit :*

- *T assez grand ;*
- $(\log\log T)^2 \leqslant V \leqslant \log T/\log\log T$;
- $\eta = 1/\log V$;
- $k = \lfloor V/(1+\eta)\rfloor$.

Alors

$$k\big(\log(k\log\log T) - 2\log(\eta V)\big) \leqslant -V\log(V/\log\log T) + 2V\log\log V + V.$$

Démonstration
On a $k \leqslant V$ donc

$$\begin{aligned}\log(k \log\log T) - 2\log(\eta V) &\leqslant -\log(V/\log\log T) + 2\log\log V \\ &\leqslant 0.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}k &\geqslant V/(1+\eta) - 1 \\ &\geqslant V(1-\eta).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}k\big(\log(k\log\log T) - 2\log(\eta V)\big) &\leqslant V(1-\eta)\big(-\log(V/\log\log T) + 2\log\log V\big) \\ &\leqslant -V\log(V/\log\log T) + 2V\log\log V + \eta V \log V \\ &= -V\log(V/\log\log T) + 2V\log\log V + V.\end{aligned}$$

□

5 Sur le nombre de zéros de la fonction ζ dans un intervalle de la droite critique

5.1 Encadrement paramétrique de l'écart à sa moyenne du nombre de zéros de la fonction ζ dans un intervalle de la droite critique

La proposition suivante donne un encadrement du nombre d'ordonnées de zéros de ζ dans l'intervalle $]t-h, t+h]$, centré par rapport à sa valeur moyenne $(h/\pi)\log(t/2\pi)$. Cet encadrement est exprimé au moyen d'un paramètre Δ, et met notamment en jeu un polynôme de Dirichlet de longueur $\exp 2\pi\Delta$.

Proposition 15 *(HR) Soit $t \geqslant 4$, $\Delta \geqslant 2$ et $0 < h \leqslant \sqrt{t}$. On a*

$$N(t+h) - N(t-h) - 2h\frac{\log t/2\pi}{2\pi} \leqslant \frac{\log t}{2\pi\Delta} - \frac{1}{\pi}\Re \sum_{p \leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{\log p}{p^{\frac12+it}} \hat{F}_+\Big(\frac{\log p}{2\pi}\Big) + O(\log\Delta),$$

et

$$N(t+h) - N(t-h) - 2h\frac{\log t/2\pi}{2\pi} \geqslant -\frac{\log t}{2\pi\Delta} - \frac{1}{\pi}\Re \sum_{p \leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{\log p}{p^{\frac12+it}} \hat{F}_-\Big(\frac{\log p}{2\pi}\Big) + O(\log\Delta),$$

où F_+ et F_- sont les fonctions de la proposition 10. De plus, on a pour tout nombre premier p :

$$\Big|\frac{\log p}{\pi}\hat{F}_\pm\Big(\frac{\log p}{2\pi}\Big)\Big| \leqslant 4.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}
N(t+h)-N(t-h) &= \sum_\rho 1_{]-h,h]}(\gamma - t) \\
&\leqslant \sum_\rho \chi_h(\gamma - t) \\
&\leqslant \sum_\rho F_+(\gamma - t) \quad \text{(d'après la proposition 10, \textit{(i)})} \\
&= \sum_\rho f(\gamma) \quad \text{(avec } f(u) = F_+(u-t)\text{)} \\
&= f\Big(\frac{1}{2i}\Big) + f\Big(-\frac{1}{2i}\Big) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\Re\psi\Big(\frac14 + \frac{iu}{2}\Big)du \\
&- \frac{\log\pi}{2\pi}\hat{f}(0) - \frac{1}{2\pi}\sum_n \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\Big(\hat{f}\Big(\frac{\log n}{2\pi}\Big) + \hat{f}\Big(-\frac{\log n}{2\pi}\Big)\Big) \quad \text{(car } f \text{ vérifie les hypothèses de la proposition 11)} \\
&= F_+\Big(\frac{1}{2i} - t\Big) + F_+\Big(-\frac{1}{2i} - t\Big) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_+(u-t)\Re\psi\Big(\frac14 + \frac{iu}{2}\Big)du \\
&- \frac{\log\pi}{2\pi}\hat{F}_+(0) - \frac{1}{2\pi}\sum_n \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\Big(n^{-it}\hat{F}_+\Big(\frac{\log n}{2\pi}\Big) + n^{it}\hat{F}_+\Big(-\frac{\log n}{2\pi}\Big)\Big) \quad \text{(car } \hat{f}(x) = e^{-2i\pi tx}\hat{F}_+(x)\text{).}
\end{aligned}$$

Examinons successivement les différents termes de cette somme. Nous avons :

$$\begin{aligned}
F_+\Big(\frac{1}{2i} - t\Big) + F_+\Big(-\frac{1}{2i} - t\Big) &\ll (\Delta t)^{-2} \quad \text{(d'après la proposition 10 \textit{(iv)}, qui s'applique car } t \geqslant 2h\text{)} \\
&\ll 1 \quad \text{(car } \Delta \geqslant 2 \text{ et } t \geqslant 4\text{);}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_+(u-t)\Re\psi\Big(\frac14 + \frac{iu}{2}\Big)du - \frac{\log\pi}{2\pi}\hat{F}_+(0) = (2h + 1/\Delta)\frac{\log t/2\pi}{2\pi} + O(1) \quad \text{(propositions 12 et 10 \textit{(ii)})}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\sum_n \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\Big(n^{-it}\hat{F}_+\Big(\frac{\log n}{2\pi}\Big) + n^{it}\hat{F}_+\Big(-\frac{\log n}{2\pi}\Big)\Big) &= \frac{1}{\pi}\Re\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^{\frac12 + it}}\hat{F}_+\Big(\frac{\log n}{2\pi}\Big) \quad \text{(car } \hat{F}_+ \text{ est réelle et paire)} \\
&= \frac{1}{\pi}\Re\sum_{n\leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{\Lambda(n)}{n^{\frac12 + it}}\hat{F}_+\Big(\frac{\log n}{2\pi}\Big) \quad \text{(car } \hat{F}_+(x) = 0 \text{ pour } x \geqslant \Delta\text{)} \\
&= \frac{1}{\pi}\Re\sum_{p\leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{\log p}{p^{\frac12 + it}}\hat{F}_+\Big(\frac{\log p}{2\pi}\Big) + \frac{1}{\pi}\Re\sum_{p\leqslant e^{\pi\Delta}} \frac{\log p}{p^{1+2it}}\hat{F}_+\Big(\frac{\log p}{\pi}\Big) + O(1) \\
&\quad \text{(car } \Lambda(n)\hat{F}_+(\log n/2\pi) \ll 1 \text{ ; la contribution des } n = p^k \text{ avec } k \geqslant 3 \text{ est donc } O(1)\text{)} \\
&= \frac{1}{\pi}\Re\sum_{p\leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{\log p}{p^{\frac12 + it}}\hat{F}_+\Big(\frac{\log p}{2\pi}\Big) + O(\log\Delta).
\end{aligned}$$

Finalement, nous avons établi la majoration

$$N(t+h) - N(t-h) - 2h\frac{\log t/2\pi}{2\pi} \leqslant \frac{\log t}{2\pi\Delta} - \frac{1}{\pi}\Re\sum_{p\leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{\log p}{p^{\frac12 + it}}\hat{F}_+\Big(\frac{\log p}{2\pi}\Big) + O(\log\Delta).$$

La démonstration de la minoration est analogue. □

5.2 Majoration de l'écart à sa moyenne du nombre de zéros de la fonction ζ dans un intervalle de la droite critique

Lorsqu'on majore trivialement les polynômes de Dirichlet qui interviennent dans la proposition 15, on obtient le résultat suivant, dû à Goldston et Gonek (cf. [2]). Notre énoncé est légèrement plus précis que celui de [2].

Proposition 16 *Soit t assez grand et $0 < h \leqslant \sqrt{t}$. On a*

$$|N(t+h) - N(t-h) - (h/\pi)\log(t/2\pi)| \leqslant (\log t)/2\log\log t + \big(1/2 + o(1)\big)\log t \log\log\log t/(\log\log t)^2.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{\log p}{p^{\frac12+it}}\hat{F}_\pm\Big(\frac{\log p}{2\pi}\Big)\Big| &\ll \sum_{p\leqslant e^{2\pi\Delta}}\frac{1}{\sqrt{p}}\\ &\ll \frac{e^{\pi\Delta}}{\Delta}.\end{aligned}$$

On choisit $\Delta = \frac{1}{\pi}\log(\log t/\log\log t)$ et on vérifie alors que

$$\frac{\log t}{2\pi\Delta} + O(e^{\pi\Delta}/\Delta) + O(\log\Delta) = (\log t)/2\log\log t + \big(1/2 + o(1)\big)\log t\log\log\log t/(\log\log t)^2. \qquad \square$$

5.3 Fréquence des déviations du nombre de zéros de la fonction ζ dans un intervalle de la droite critique

Nous donnons maintenant une majoration du nombre de points t « bien espacés » de l'intervalle $[T, 2T]$ pour lesquels le nombre d'ordonnées de zéros de ζ dans l'intervalle $]t-h, t+h]$ dépasse sa moyenne $(h/\pi)\log(t/2\pi)$ d'une quantité V. On a une majoration analogue pour la fréquence des déviations dans l'autre direction, mais nous n'en aurons pas l'usage.

Proposition 17 *Soit :*
- T *assez grand ;*
- $0 < h \leqslant \sqrt{T}$ *;*
- $(\log\log T)^2 \leqslant V \leqslant \log T/\log\log T$ *;*
- $T \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_R \leqslant 2T$ *tels que* $t_{r+1} - t_r \geqslant 1$, $1 \leqslant r < R$.

On suppose que

$$N(t_r+h) - N(t_r-h) - h\frac{\log t_r/2\pi}{\pi} \geqslant V, \quad 1\leqslant r\leqslant R.$$

Alors

$$R \ll T\exp\big(-V\log(V/\log\log T) + 2V\log\log V + O(V)\big).$$

Démonstration

La majoration de $N(t_r+h) - N(t_r-h) - (h/\pi)\log(t_r/2\pi)$ fournie par la proposition 15 montre que pour $\Delta \geqslant 2$, on a

$$\Big|\sum_{p\leqslant e^{2\pi\Delta}}\frac{a(p)}{p^{\frac12+it_r}}\Big| \geqslant V - \frac{\log 2T}{2\pi\Delta} + O(\log\Delta), \quad 1\leqslant r\leqslant R,$$

où $a(p) = a(p, \Delta, h) = \pi^{-1} \log p \, \hat{F}_+\big((\log p)/2\pi\big)$ vérifie $|a(p)| \leqslant 4$, d'après la proposition 10, *(iii)*.

On choisit
$$\Delta = \frac{(1+\eta)\log T}{2\pi V} \quad \text{avec } \eta = 1/\log V,$$
de sorte que
$$\begin{aligned} \exp 2\pi\Delta &= T^{(1+\eta)/V}, \\ \log\Delta &\ll \log\log T \ll \sqrt{V}, \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} V - \frac{\log 2T}{2\pi\Delta} + O(\log\Delta) &= \eta\frac{V}{1+\eta} + O(\sqrt{V}) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\eta V \end{aligned}$$

Par conséquent,
$$\Big|\sum_{p \leqslant T^{(1+\eta)/V}} \frac{a(p)}{p^{\frac{1}{2}+it_r}}\Big| \geqslant \frac{1}{2}\eta V, \quad 1 \leqslant r \leqslant R.$$
En élevant cette inégalité à la puissance $2k$ et en sommant pour $r = 1, \ldots, R$, on obtient
$$\begin{aligned} R(\eta V/2)^{2k} &\leqslant \sum_{r=1}^{R}\Big|\sum_{p \leqslant T^{(1+\eta)/V}} \frac{a(p)}{p^{\frac{1}{2}+it_r}}\Big|^{2k} \\ &\ll T(\log T)^2 k!\Big(\sum_{p \leqslant T^{(1+\eta)/V}} |a(p)|^2 p^{-1}\Big)^k, \end{aligned}$$
d'après la proposition 13, pourvu que $T^{k(1+\eta)/V} \leqslant T$.

La dernière quantité est
$$\ll T(\log T)^2 (Ck\log\log T)^k,$$
où C est une constante absolue. Ainsi
$$R \ll T(\log T)^2(4C)^k\big((k\log\log T)/\eta^2V^2\big)^k.$$
On choisit $k = \lfloor V/(1+\eta)\rfloor$. La proposition 14 s'applique :
$$((k\log\log T)/\eta^2V^2\big)^k \leqslant \exp\big(-V\log(V/\log\log T) + 2V\log\log V + V\big).$$
Enfin,
$$\begin{aligned} (\log T)^2(4C)^k &= \exp(k\log 4C + 2\log\log T) \\ &= \exp O(V), \end{aligned}$$
d'où le résultat. □

6 Valeurs de V pour lesquelles toutes les ordonnées sont V-typiques

Nous donnons une variante un peu plus précise de la première assertion de la Proposition 4 de [4].

Proposition 18 *Soit T assez grand, et V tel que*

$$\frac{1}{2} + \log\log\log T / \log\log T \leqslant V \log\log T / \log T \leqslant 1.$$

Alors toute ordonnée $t \in [T, 2T]$ est V-typique.

Démonstration

Il faut vérifier les critères *(i), (ii), (iii)* de la définition d'une ordonnée V-typique.

Pour *(i)*, on a

$$f(u) = \sum_{n \leqslant u} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \log n} \ll \frac{\sqrt{u}}{\log u}, \quad u \geqslant 2,$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \log n} \log(x/n) &= \int_1^x f(u) \frac{du}{u} \\ &\ll \frac{\sqrt{x}}{\log x}, \quad x \geqslant 2. \end{aligned}$$

Or $T^{1/V} \leqslant (\log T)^2$ car $V \geqslant \frac{1}{2} \log T / \log\log T$. Par conséquent, pour $\sigma \geqslant 1/2$, $t \in \mathbb{R}$, et $x = T^{1/V}$, on a

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} \Big| &\leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} \\ &\ll \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^2} \\ &\ll \frac{\log T}{(\log\log T)^2} \\ &= o(V). \end{aligned}$$

Pour *(ii)* on a, avec $t' \in [t-1, t+1]$ et $h = \pi\delta V / \log T$:

$$\begin{aligned} 1 + N(t'+h) - N(t'-h) &\leqslant (h/\pi) \log(t'/2\pi) + \frac{1}{2} \log t' / \log\log t' + \big(1/2 + o(1)\big) \log t' \log\log\log t' / (\log\log t')^2 \\ &\qquad \text{(proposition 16)} \\ &\leqslant (h/\pi) \log T + \frac{1}{2} \log T / \log\log T + \log T \log\log\log T / (\log\log T)^2 \\ &\leqslant (1+\delta)V. \end{aligned}$$

Pour *(iii)* on a, avec $t' \in [t-1, t+1]$ et $h = \pi V/\big((\log V)\log T\big)$:

$$\begin{aligned}
1 + N(t'+h) - N(t'-h) &\leqslant (h/\pi)\log(t'/2\pi) + \frac{1}{2}\log t'/\log\log t' + \big(1/2 + o(1)\big)\log t' \log\log\log t'/(\log\log t')^2 \\
&\leqslant \frac{V}{\log V} + \frac{1}{2}\log T/\log\log T + \big(1/2 + o(1)\big)\log T \log\log\log T/(\log\log T)^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\log T/\log\log T + \log T \log\log\log T/(\log\log T)^2 \\
&\leqslant V. \qquad \square
\end{aligned}$$

6.1 Minoration du logarithme du module de la fonction ζ

Proposition 19 *Pour $|t|$ assez grand et $1/2 < \sigma \leqslant 2$, on a*

$$\log|\zeta(\sigma+it)| \geqslant -\frac{\log|t|}{\log\log|t|}\log\frac{1}{\sigma - 1/2} - 3\frac{\log|t|\log\log\log|t|}{\log\log|t|}.$$

Démonstration

On applique les propositions 1 et 18 en prenant

$$V = \frac{\log|t|}{\log\log|t|}, \quad \delta = \frac{1}{2}.$$

L'ordonnée $|t|$ est V-typique de taille $|t|$ et

$$\begin{aligned}
V\log\Big(\frac{V/\log|t|}{\sigma-1/2}\Big) + 2(1+\delta)V\log\log V + O(V\delta^{-2}) &= \frac{\log|t|}{\log\log|t|}\log\frac{1}{\sigma-1/2} + 2\frac{\log|t|\log\log\log|t|}{\log\log|t|} + O(\log|t|/\log\log|t|) \\
&\leqslant \frac{\log|t|}{\log\log|t|}\log\frac{1}{\sigma-1/2} + 3\frac{\log|t|\log\log\log|t|}{\log\log|t|}. \qquad \square
\end{aligned}$$

7 Majoration du nombre d'ordonnées atypiques bien espacées dans un intervalle

Nous majorons maintenant le nombre d'ordonnées V-atypiques de taille T, bien espacées.

Proposition 20 *(RH) Soit*

- *T assez grand ;*
- *$2(\log\log T)^2 \leqslant V \leqslant \log T/\log\log T$;*
- *$T \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_R \leqslant 2T$ des ordonnées V-atypiques telles que $t_{r+1} - t_r \geqslant 1$, $1 \leqslant r < R$.*

Alors

$$R \ll T\exp\big(-V\log(V/\log\log T) + 2V\log\log V + O(V)\big).$$

Démonstration

Observons d'abord que le majorant annoncé est une fonction décroissante de V et que sa valeur en $V = \log T/\log\log T$ est

$$\geqslant \exp(3\log T\log\log\log T/\log\log T),$$

quantité qui tend vers l'infini avec T.

Il suffit de démontrer séparément la majoration pour le nombre R_1 (resp. R_2, resp. R_3) (mais nous le noterons encore R) de points (que nous noterons encore $t_1, \ldots, t_R$) bien espacés dans $[T, 2T]$ infirmant la condition *(i)* (resp. *(ii)*, resp. *(iii)*) de la définition page 3.

Commençons par la condition *(i)*. Si elle est en défaut pour chaque t_r, il existe des $\sigma_r \geqslant 1/2$ tels que

$$\Big|\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_r+it_r}\log n}\frac{\log(x/n)}{\log x}\Big| > 2V, \quad 1 \leqslant r \leqslant R \quad (x = T^{1/V}).$$

La contribution des $n = p^\alpha$ avec $\alpha \geqslant 2$ est

$$\begin{aligned}&\ll \log\log x\\ &\ll \log\log T\\ &\ll \sqrt{V}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Big|\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p^{\sigma_r+it_r}}\frac{\log(x/p)}{\log x}\Big| \geqslant V, \quad 1 \leqslant r \leqslant R \quad (x = T^{1/V}).$$

d'où

$$\begin{aligned}RV^{2k} &\leqslant \sum_{r=1}^{R}\Big|\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^{\sigma_r+it_r}}\frac{\log(x/p)}{\log x}\Big|^{2k}\\ &\ll T(\log T)^2 k!\Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\frac{\log^2(x/p)}{\log^2 x}\Big)^k,\end{aligned}$$

pourvu que $x^k \leqslant T$, c'est-à-dire $k \leqslant V$.

On a

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\frac{\log^2(x/p)}{\log^2 x} &\ll \log\log x\\ &\leqslant \log\log T,\end{aligned}$$

et donc

$$R \ll T(\log T)^2\big((Ck\log\log T)/V^2\big)^k,$$

où C est une constante absolue. Le choix $k = \lfloor V \rfloor$ et un calcul plus simple que celui de la proposition 14 conduisent à l'estimation

$$R \ll T\exp\big(-V\log(V/\log\log T) + O(V)\big).$$

Passons à la condition *(ii)*. Si t_r ne la vérifie pas, il existe t'_r tel que $|t_r - t'_r| \leqslant 1$ et

$$N(t'_r + \pi\delta V/\log T) - N(t'_r - \pi\delta V/\log T) \geqslant (1+\delta)V - 1,$$

d'où

$$N(t'_r + \pi\delta V/\log T) - N(t'_r - \pi\delta V/\log T) - (\delta V/\log T)\log(t'_r/2\pi) \geqslant V + O(1).$$

Choisissons une ordonnée t_r sur trois, de sorte que les t'_r correspondants soient bien espacés, et gardons uniquement les t'_r de l'intervalle $[T, 2T]$ (nous en laissons alors au plus deux de côté). Nous pouvons appliquer la proposition 17 :

$$\lfloor (R+2)/3 \rfloor - 2 \ll T \exp\bigl(-V \log(V/\log\log T) + 2V \log\log V + O(V)\bigr),$$

et on a la même estimation pour R.

Enfin, si t_r infirme la condition *(iii)*, il existe t'_r tel que $|t_r - t'_r| \leqslant 1$ et

$$N\Big(t'_r + \pi V/\big((\log V)\log T\big)\Big) - N\Big(t'_r - \pi V/\big((\log V)\log T\big)\Big) \geqslant V - 1,$$

d'où

$$N\Big(t'_r+\pi V/\big((\log V)\log T\big)\Big)-N\Big(t'_r-\pi V/\big((\log V)\log T\big)\Big)-V\log(t'_r/2\pi)/\big((\log V)\log T\big) \geqslant V+O(V/\log V).$$

En procédant comme pour la condition *(ii)*, nous appliquons de nouveau la proposition 17. Il reste à observer que, pour $V' = V + O(V/\log V)$, on a

$$-V'\log(V'/\log\log T) + 2V'\log\log V' + O(V') \leqslant -V\log(V/\log\log T) + 2V\log\log V + O(V).$$

C'est un calcul facile, qui termine la démonstration. □

8 Démonstration du théorème

8.1 Application de la formule de Perron

Rappelons dans l'énoncé suivant la forme classique de la formule de Perron que nous allons utiliser (pour une démonstration, voir [5], II.3).

Proposition 21 *Soit*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

une série de Dirichlet, absolument convergente pour $\Re z > 1$. On suppose que $|a_n| \leqslant 1$ pour tout n. Alors, pour $N \geqslant T \geqslant 3$, N entier, on a

$$\sum_{n \leqslant N} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} F(z)\frac{N^z}{z}dz + O(N\log T/T),$$

où $c = 1 + 1/\log N$. La constante implicite dans le O est absolue.

On a donc

$$M(N) = A_N + O(\log N) \quad (N \geqslant 3),$$

où

$$A_N = \frac{1}{2\pi i}\int_{1+1/\log N - i2^{\lfloor \log N/\log 2\rfloor}}^{1+1/\log N + i2^{\lfloor \log N/\log 2\rfloor}} \zeta(z)^{-1}\frac{N^z}{z}dz.$$

8.2 Déformation du chemin d'intégration

Pour majorer $|A_N|$, nous allons remplacer le segment d'intégration $[1+1/\log N - i2^{\lfloor \log N/\log 2\rfloor}, 1+1/\log N + i2^{\lfloor \log N/\log 2\rfloor}]$ par une variante $\mathcal{S}_N$ du chemin défini par Soundararajan dans [4]. Nous commençons par une description de $\mathcal{S}_N$. On suppose N assez grand. Nous posons

$$\kappa = \lfloor (\log N)^{1/2}(\log\log N)^c\rfloor, \quad K = \lfloor \log N/\log 2\rfloor,$$

où c est une constante positive, fixée ultérieurement. Nous posons également $T_k = 2^k$ pour $\kappa \leqslant k \leqslant K$.

Le chemin $\mathcal{S}_N$ est symétrique par rapport à l'axe réel, et constitué de segments verticaux et horizontaux. Nous décrivons seulement la partie de $\mathcal{S}_N$ située dans le demi-plan $\Im z \geqslant 0$.

• Il y a d'abord un segment vertical $[1/2+1/\log N, 1/2+1/\log N + iT_\kappa]$.

• Pour chaque k tel que $\kappa \leqslant k < K$, on considère les entiers n de l'intervalle $[T_k, 2T_k[$. On définit alors V_n comme le plus petit entier de l'intervalle $[(\log\log T_k)^2, \log T_k/\log\log T_k]$ tel que tous les points de $[n, n+1]$ soient V_n-typiques de taille T_k. L'existence de V_n est garantie par la proposition 18. On a même

$$V_n \leqslant \frac{1}{2}\log n/\log\log n + \log n(\log\log\log n)/(\log\log n)^2 + 1.$$

On inclut alors dans $\mathcal{S}_N$ le segment vertical $[1/2+V_n/\log N + in, 1/2+V_n/\log N + i(n+1)]$

Il y a enfin des segments horizontaux reliant tous ces segments verticaux :

• le segment $[1/2+1/\log N + iT_\kappa, 1/2+V_{N_0}/\log N + iT_\kappa]$;

• les segments $[1/2+V_n/\log N + i(n+1), 1/2+V_{n+1}/\log N + i(n+1)]$, $T_\kappa \leqslant n \leqslant T_K - 2$;

• le segment $[1/2+V_{N-1}/\log N + iT_K, 1+1/\log N + iT_K]$.

D'après le théorème de Cauchy, on a sous l'hypothèse de Riemann

$$A_N = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{S}_N} \zeta(z)^{-1}\frac{N^z}{z}dz.$$

8.3 Majorations des contributions à A_N des différents segments de $\mathcal{S}_N$

Proposition 22 *On a*

$$N^{-1/2}A_N \ll_\delta \exp\big((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{c+\delta}\big) + B_N,$$

où

$$B_N = \sum_{n=T_\kappa}^{T_K-1}\frac{1}{n}\exp\big(V_n\log(\log N/\log n) + 2(1+2\delta)V_n\log\log V_n\big).$$

Démonstration

Pour commencer, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{S}_N, |\Im z|\leqslant T_\kappa}\zeta(z)^{-1}\frac{N^z}{z}dz\right| &\ll N^{1/2}\int_{-T_\kappa}^{T_\kappa}|\zeta(1/2+1/\log N + i\tau)|^{-1}\frac{d\tau}{\sqrt{1/4+\tau^2}}\\ &\ll N^{1/2}\log T_\kappa \max_{|\tau|\leqslant T_\kappa}|\zeta(1/2+1/\log N+i\tau)|^{-1}\\ &\leqslant N^{1/2}(\log T_\kappa)\exp\big((\log T_\kappa/\log\log T_\kappa)\log\log N + 3(\log T_\kappa/\log\log T_\kappa)\log\log\log T_\kappa\big)\\ &\quad \text{(d'après la proposition 19)}\\ &\leqslant N^{1/2}T_\kappa^3 \quad (\text{car } \log T_\kappa \geqslant (\log N)^{1/2}).\end{aligned}$$

Pour les autres segments, nous examinons seulement la partie de $\mathcal{S}_N$ située dans le demi-plan $\Im z > 0$. On aura les mêmes estimations pour la partie située dans le demi-plan $\Im z < 0$.

La contribution du segment horizontal $[1/2 + 1/\log N \pm iT_\kappa, 1/2 + V_{T_\kappa}/\log N \pm iT_\kappa]$ est

$$\begin{aligned}&\ll N^{1/2}(\exp V_{T_\kappa})T_\kappa^{-1}\exp\bigl((\log T_\kappa/\log\log T_\kappa)\log\log N + 3(\log T_\kappa/\log\log T_\kappa)\log\log\log T_\kappa\bigr)\\ &\ll N^{1/2}T_\kappa^3.\end{aligned}$$

Pour chaque n, $T_\kappa \leqslant n \leqslant T_K - 1$, la contribution du segment vertical $[1/2 + V_n/\log N + in, 1/2 + V_n/\log N + i(n+1)]$ est

$$\ll \frac{1}{n}N^{1/2}\exp\bigl(V_n\log(\log N/\log n) + 2(1+\delta)V_n\log\log V_n + DV_n\delta^{-2}\bigr)$$

(où D est une constante positive absolue), d'après la proposition 9 (avec $V = V' = V_n$, $n \leqslant t \leqslant n+1$, $T' = n$, $x = N$).

Pour chaque n, $T_\kappa \leqslant n \leqslant T_K - 2$, la contribution du segment horizontal $[1/2 + V_n/\log N + i(n+1), 1/2 + V_{n+1}/\log N + i(n+1)]$ est

$$\ll \frac{1}{n}N^{1/2}\exp\Bigl(V\log\bigl(\log N/\log(n+1)\bigr) + 2(1+\delta)V\log\log V + DV\delta^{-2}\Bigr),$$

où l'on a posé $V = \max(V_n, V_{n+1})$, toujours d'après la proposition 9, qui s'applique car $n+1$ est à la fois V_n-typique et V_{n+1}-typique. Observons que la borne obtenue est

$$\begin{aligned}\ll \frac{1}{n}N^{1/2}&\exp\bigl(V_n\log(\log N/\log n) + 2(1+\delta)V_n\log\log V_n + DV_n\delta^{-2}\bigr) +\\ &\frac{1}{n+1}N^{1/2}\exp\Bigl(V_{n+1}\log\bigl(\log N/\log(n+1)\bigr) + 2(1+\delta)V_{n+1}\log\log V_{n+1} + DV_{n+1}\delta^{-2}\Bigr).\end{aligned}$$

Enfin, la contribution du segment horizontal $[1/2 + V_{T_K-1}/\log N + iT_K, 1 + 1/\log N + iT_K]$ est

$$\begin{aligned}&\ll \frac{1}{T_K}N\exp\bigl(O(\delta^{-1}V_{T_K-1})\bigr) \quad \text{(d'après la proposition 1)}\\ &\ll_\delta N^{1/2} \quad (\text{car } V_{T_K-1} \leqslant \log N/\log\log N).\end{aligned}$$

En notant en outre que

$$\exp(DV\delta^{-2}) \ll_\delta \exp(\delta V\log\log V),$$

et

$$\begin{aligned}T_\kappa^3 &\leqslant \exp\bigl(3(\log 2)(\log N)^{1/2}(\log\log N)^c\bigr)\\ &\ll_\delta \exp\bigl((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{c+\delta}\bigr),\end{aligned}$$

cela termine la démonstration de la proposition. □

8.4 Étude de la somme B_N

Afin de majorer B_N, nous allons faire appel au calcul auxiliaire suivant.

Proposition 23 *Soit A et C des paramètres positifs tels que $A \geqslant 4C^4 + 1$. On a alors*

$$AV - V \log V + CV \log\log V \leqslant e^A A^C \quad (V > e^C).$$

Démonstration

Posons

$$f(V) = AV - V \log V + CV \log\log V \quad (V > 1).$$

On a

$$\begin{aligned} f'(V) &= A - \log V + C \log\log V - 1 + \frac{C}{\log V}, \\ f''(V) &= -\frac{1}{V} + \frac{C}{V \log V} - \frac{C}{V(\log V)^2}. \end{aligned}$$

En particulier, on a $f''(V) < 0$ si $V > e^C$. De plus,

$$\begin{aligned} f'(e^C) &= A - C + C \log C - 1 + 1 \\ &= A - C + C \log C \\ &\geqslant 4C^4 + 1 - C + C \log C \\ &> 0, \end{aligned}$$

et $f'(\infty) = -\infty$.

Il existe donc un unique $V_0 > e^C$ tel que

- $f'(V) > 0$ pour $e^C \leqslant V < V_0$;
- $f'(V) < 0$ pour $V > V_0$.

On a $f'(V_0) = 0$, c'est-à-dire

$$A - \log V_0 + C \log\log V_0 = 1 - \frac{C}{\log V_0}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \max_{V \geqslant e^C} f(V) &= f(V_0) \\ &= V_0(A - \log V_0 + C \log\log V_0) \\ &= V_0(1 - C/\log V_0) \\ &\leqslant V_0. \end{aligned}$$

Posons maintenant $V_1 = e^A A^C$ $(> e^C)$. On a

$$\begin{aligned}
f'(V_1) &= A - \log V_1 + C \log\log V_1 - 1 + \frac{C}{\log V_1} \\
&= A - (A + C\log A) + C\log(A + C\log A) - 1 + \frac{C}{A + C\log A} \\
&\leqslant C\log\Big(1 + \frac{C\log A}{A}\Big) - 1 + \frac{C}{A} \\
&\leqslant C\log\Big(1 + \frac{C}{A^{1/2}}\Big) - 1 + \frac{C}{A} \quad \text{(car } \log A \leqslant A^{1/2}) \\
&\leqslant \frac{C^2}{A^{1/2}} - 1 + \frac{C}{A} \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

On a donc $V_0 \leqslant V_1$, d'où le résultat annoncé. □

Proposition 24 *On a*

$$B_N \ll_\delta \exp\big((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5-c+6\delta}\big).$$

Démonstration

Nous allons utiliser un découpage dyadique en considérant les sommes

$$B_N(T_k) = \sum_{T_k \leqslant n < 2T_k} \frac{1}{n}\exp\big(V_n\log(\log N/\log n) + 2(1+2\delta)V_n\log\log V_n\big) \quad (\kappa \leqslant k < K).$$

On aura en effet

$$\begin{aligned}
B_N &\leqslant K \max_{\kappa\leqslant k<K} B_N(T_k) \\
&\ll \log N \max_{\kappa\leqslant k<K} B_N(T_k).
\end{aligned}$$

Posons $T_k = T$. Nous réarrangeons $B_N(T)$ suivant les valeurs de V_n.

$$\begin{aligned}
B_N(T) &= \sum_{\substack{(\log\log T)^2 \leqslant V \\ V \leqslant (\log T)/(\log\log T)}} \sum_{\substack{T\leqslant n<2T \\ V_n = V}} \frac{1}{n}\exp\big(V\log(\log N/\log n) + 2(1+2\delta)V\log\log V\big) \\
&\leqslant \frac{1}{T}\sum_{\substack{(\log\log T)^2 \leqslant V \\ V \leqslant (\log T)/(\log\log T)}} \exp\big(V\log(\log N/\log T) + 2(1+2\delta)V\log\log V\big)\mathrm{card}\{n,\, T\leqslant n<2T,\, V_n = V\}.
\end{aligned}$$

Nous majorons d'abord la contribution des $V \leqslant 2(\log\log T)^2 + 1$, en utilisant la majoration triviale

$$\mathrm{card}\{n,\, T \leqslant n < 2T,\, V_n = V\} \leqslant T.$$

Cette contribution est

$$\leqslant \exp\Big(O\big((\log\log N)^3\big)\Big).$$

Considérons maintenant la contribution des $V > 2(\log\log T)^2 + 1$. Si $T \leqslant n < 2T$ et $V_n = V$, la minimalité de V_n entraîne l'existence dans l'intervalle $[n, n+1]$ de t_n, ordonnée $(V_n - 1)$-atypique de taille T. En évitant de prendre des nombres consécutifs, on partitionne alors l'ensemble

$$\{n,\, T \leqslant n < 2T,\, V_n = V\}$$

en (au plus) deux sous-ensembles, chacun étant de même cardinal qu'un ensemble d'ordonnées $(V_n - 1)$-atypiques de taille T, bien espacées dans $[T, 2T]$. La proposition 20 donne alors

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\{n,\, T \leqslant n < 2T,\, V_n = V\} &\ll T\exp\Big(-(V-1)\log\big((V-1)/\log\log T\big) + 2(V-1)\log\log(V-1) + O(V)\Big)\\ &\ll T\exp\big(-V\log(V/\log\log T) + 2V\log\log V + O(V)\big).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$B_N(T) \ll_\delta \exp\Big(O\big((\log\log N)^3\big)\Big) + \sum_{\substack{2(\log\log T)^2+1\leqslant V\\ V\leqslant(\log T)/(\log\log T)}} \exp\Big(V\log\big(\log N(\log\log T)/\log T\big) - V\log V + (4+5\delta)V\log\log V\Big). \quad (5)$$

Pour majorer la somme intervenant dans (5), on utilise la proposition 23 avec

$$A = \log\big(\log N(\log\log T)/\log T\big) \quad \text{et} \quad C = 4 + 5\delta$$

(on a bien $A \geqslant 4C^4 + 1$ et $V > e^C$).

Par conséquent,

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{2(\log\log T)^2+1\leqslant V\\ V\leqslant(\log T)/(\log\log T)}} \exp\Big(V\log\big(\log N(\log\log T)/\log T\big) - V\log V + (4+5\delta)V\log\log V\Big)\\ &\qquad\leqslant \frac{\log T}{\log\log T}\exp\bigg(\log N\frac{\log\log T}{\log T}\Big(\log\big(\log N\frac{\log\log T}{\log T}\big)\Big)^{4+5\delta}\bigg).\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{\log\log T}{\log T} &= \frac{\log\log T_k}{\log T_k}\\ &\leqslant \frac{\log\log T_\kappa}{\log T_\kappa}\\ &\leqslant \frac{\log\log N}{(\log N)^{1/2}(\log\log N)^c},\end{aligned}$$

on a finalement

$$B_N \ll_\delta \exp\big((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5-c+6\delta}\big). \qquad \square$$

8.5 Conclusion

En réunissant les résultats des propositions 21, 22 et 24, on obtient

$$N^{-1/2}M(N) \ll_\delta \exp\bigl((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{c+\delta}\bigr) + \exp\bigl((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5-c+6\delta}\bigr).$$

On choisit alors $c = 5/2$ et δ arbitrairement petit pour démontrer le théorème.

Références

[1] H. Davenport, Multiplicative number theory, 3rd edition revised by H.L. Montgomery, Springer, 2000.

[2] D.A. Goldston et S.M. Gonek, *A note on $S(t)$ and the zeros of the Riemann zeta-function*, Bull. London Math. Soc. **39** (2007), 482-486.

[3] H. Maier et H.L. Montgomery, *The sum of the Möbius function*, à paraître dans Journal London Math. Soc.

[4] K. Soundararajan, *Partial sums of the Möbius function*, arXiv :0705.0723v2

[5] G. Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, 3e édition, Belin, 2008.

Michel BALAZARD
C.N.R.S., Institut de Mathématiques de Luminy
Case 907
13288 Marseille Cedex 09
FRANCE

Adresse électronique : `balazard@iml.univ-mrs.fr`

Anne de ROTON
Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré Nancy 1
BP 239
54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex
FRANCE

Adresse électronique : `deroton@iecn.u-nancy.fr`